Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2023
Convocatoria ordinaria

mentoor.es

Problema 1. Álgebra

Dadas las matrices $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$, $\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$ **y** $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}}$**, se pide:**

a) **Estudiar cuándo la ecuación matricial** $\boldsymbol{A^2X = B}$ **tiene solución en función del parámetro real m.**

b) **Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan.**

Solución:

a) **Estudiar cuándo la ecuación matricial** $\boldsymbol{A^2X = B}$ **tiene solución en función del parámetro real m.**

La ecuación matricial $A^2X = B$ representa un sistema de ecuaciones lineales. Tendrá solución única si la matriz de coeficientes, A^2, es invertible, es decir, si $|A^2| \neq 0$.
Sabemos que $|A^2| = (|A|)^2$. Primero calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1(m \cdot 0 - 1 \cdot 3) - 2(0) + 0 = -3.$$

Como el determinante de A es -3, un valor constante y distinto de cero para cualquier valor de m, la matriz A es siempre invertible.
En consecuencia, el determinante de A^2 es:

$$|A^2| = (|A|)^2 = (-3)^2 = 9.$$

Dado que $|A^2| = 9 \neq 0$ para cualquier valor de m, la matriz A^2 es siempre invertible.
Esto implica que el sistema de ecuaciones $A^2X = B$ siempre tiene rango máximo. Por el Teorema de Rouché-Frobenius, será un Sistema Compatible Determinado (S.C.D.) con solución única para cualquier valor del parámetro real m.

$$\boxed{\textbf{La ecuación tiene una solución única para todo valor de } \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}.}$$

b) **Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan.**

Como hemos demostrado, existe una única solución para todo m. La solución es $X = (A^2)^{-1}B$.
Una forma eficiente de calcular esto es $X = A^{-1}A^{-1}B$. Primero calculamos A^{-1}. $|A| = -3$.

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix} \implies \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & m \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -m/3 \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos $Y = A^{-1}B$:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -m/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-6 \\ 3 \\ -3m \end{pmatrix}$$

Finalmente, calculamos $X = A^{-1}Y$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -m/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-6 \\ 3 \\ -3m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(m-6)+2(3)-\frac{2}{3}(-3m) \\ 0(m-6)+0(3)+\frac{1}{3}(-3m) \\ 0(m-6)+1(3)-\frac{m}{3}(-3m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-6+6+2m \\ -m \\ 3+m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m \\ -m \\ m^2+3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\textbf{La solución es } \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 3m \\ -m \\ m^2+3 \end{pmatrix}}.}$$

Problema 2. Álgebra

Dadas las matrices $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$ **y** $\boldsymbol{C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}}$, **se pide:**

a) **Obtener la matriz** $\boldsymbol{(AB^T + I)^{-1}}$, **donde I es la matriz identitat de las dimensiones adecuadas para realizar la operación.**
b) **Comprobar que** $\boldsymbol{C^2 = -\alpha^3 I}$, **donde I es la matriz identidad, y calcular** $\boldsymbol{C^{13}}$.

Solución:

a) **Obtener la matriz** $\boldsymbol{(AB^T + I)^{-1}}$, **donde I es la matriz identitat de las dimensiones adecuadas para realizar la operación.**

Primero calculamos el producto AB^T.

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1)+0(1)+1(1) & 1(2)+0(-1)+1(0) \\ 0(1)+1(1)+1(1) & 0(2)+1(-1)+1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora sumamos la matriz identidad de orden 2.

$$M = AB^T + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa M^{-1}, hallamos su determinante: $|M| = 3(0) - 2(2) = -4$.

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\text{Adj}(M)^t = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{(AB^T + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}}.}$$

b) **Comprobar que** $\boldsymbol{C^2 = -\alpha^3 I}$, **donde I es la matriz identidad, y calcular** $\boldsymbol{C^{13}}$.

Comprobación:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(0)+\alpha(-\alpha^2) & 0(\alpha)+\alpha(0) \\ -\alpha^2(0)+0(-\alpha^2) & -\alpha^2(\alpha)+0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix}$$

$$-\alpha^3 I = -\alpha^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix}$$

Queda comprobado que $C^2 = -\alpha^3 I$.
Cálculo de $\boldsymbol{C^{13}}$:
Podemos descomponer la potencia para usar la relación encontrada:

$$C^{13} = C^{12}\cdot C = (C^2)^6 \cdot C = (-\alpha^3 I)^6 \cdot C$$
$$= (-\alpha^3)^6 \cdot I^6 \cdot C = \alpha^{18}\cdot I \cdot C = \alpha^{18}C$$
$$C^{13} = \alpha^{18}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C^{13} = \alpha^{18}C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}}.}$$

Problema 3. Geometría

Dada la recta $r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ **y los puntos** $P = (0, 0, 3)$ **y** $Q = (2, 2, a)$, **obtener:**

a) **Los valores del parámetro real a, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q.**
b) **La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P.**

Solución:

a) **Los valores del parámetro real a, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q.**

Primero, obtenemos el vector director de la recta r, $\vec{v}_r$. Al estar dada por la intersección de dos planos, su vector director es perpendicular a los vectores normales de dichos planos, $\vec{n}_1 = (1, -1, 0)$ y $\vec{n}_2 = (1, 2, 1)$.

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1) - \vec{j}(1) + \vec{k}(2 - (-1)) = (-1, -1, 3).$$

La recta que pasa por P y Q, llamémosla s, tiene como vector director a $\vec{PQ}$.

$$\vec{PQ} = Q - P = (2 - 0, 2 - 0, a - 3) = (2, 2, a - 3).$$

Para que las rectas r y s sean paralelas, sus vectores directores deben ser proporcionales.

$$\frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{a-3}$$

La primera parte de la igualdad, $-1/2 = -1/2$, se cumple. De la segunda parte, despejamos a:

$$\frac{-1}{2} = \frac{3}{a-3} \implies -(a-3) = 2 \cdot 3 \implies -a + 3 = 6 \implies a = -3.$$

$$\boxed{\textbf{Las rectas son paralelas si } \boldsymbol{a = -3}.}$$

b) **La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P.**

Si un plano π es perpendicular a la recta r, su vector normal $\vec{n}_\pi$ es el vector director de la recta, $\vec{v}_r$.

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1, -1, 3).$$

La ecuación del plano será de la forma $-x - y + 3z + D = 0$. Para hallar D, imponemos la condición de que el plano pasa por el punto $P(0, 0, 3)$.

$$-(0) - (0) + 3(3) + D = 0 \implies 9 + D = 0 \implies D = -9.$$

La ecuación del plano es $-x - y + 3z - 9 = 0$, o multiplicando por -1 para que el primer coeficiente sea positivo, $x + y - 3z + 9 = 0$.

$$\boxed{\textbf{La ecuación del plano es } \boldsymbol{x + y - 3z + 9 = 0}.}$$

Problema 4. Geometría

Dada la recta $\boldsymbol{r : \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}}$ **y el punto** $\boldsymbol{P = (0, 5, 2)}$, **se pide:**

a) **Comprobar que el punto** $\boldsymbol{Q = (2, 6, 0)}$ **pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q.**
b) **Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s.**
c) **Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r.**

Solución:

a) **Comprobar que el punto** $\boldsymbol{Q = (2, 6, 0)}$ **pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q.**

Para comprobar que $Q(2, 6, 0)$ pertenece a r, sustituimos sus coordenadas en las dos ecuaciones de los planos que definen la recta.

- $5(2) + 6 + 7(0) = 10 + 6 = 16$. Se cumple la primera ecuación.
- $9(2) - 6 + 7(0) = 18 - 6 = 12$. Se cumple la segunda ecuación.

Por tanto, Q pertenece a la recta r. La recta s pasa por $P(0, 5, 2)$ y $Q(2, 6, 0)$. Su vector director es $\vec{v}_s = \vec{PQ} = (2, 1, -2)$. La ecuación de la recta s en forma continua es:

$$\frac{x - 0}{2} = \frac{y - 5}{1} = \frac{z - 2}{-2}$$

$$\boxed{\textbf{El punto Q pertenece a r. La recta s es } \boldsymbol{\frac{x}{2} = y - 5 = \frac{z - 2}{-2}}.}$$

b) **Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s.**

Necesitamos los vectores directores de ambas rectas. Ya tenemos $\vec{v}_s = (2, 1, -2)$.
El vector director de r, $\vec{v}_r$, es el producto vectorial de los vectores normales de sus planos: $\vec{n}_1 = (5, 1, 7), \vec{n}_2 = (9, -1, 7)$.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i}(7 - (-7)) - \vec{j}(35 - 63) + \vec{k}(-5 - 9) = (14, 28, -14).$$

Podemos usar un vector director proporcional más simple, dividiendo por 14: $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$.
El ángulo α entre las rectas es el ángulo entre sus vectores directores.

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|} = \frac{|(1, 2, -1) \cdot (2, 1, -2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2 + 2 + 2|}{\sqrt{6}\sqrt{9}} = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 35.26^\circ$$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha = \textbf{arccos}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 35.26^\circ}.}$$

c) **Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r.**

La proyección ortogonal de P sobre r, llamémosla P', es la intersección de la recta r con un plano π que es perpendicular a r y que contiene a P.
El vector normal del plano π es el director de r: $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (1, 2, -1)$.
La ecuación de π es $x + 2y - z + D = 0$. Como pasa por $P(0, 5, 2)$:
$0 + 2(5) - 2 + D = 0 \implies 8 + D = 0 \implies D = -8$.
El plano es $\pi : x + 2y - z - 8 = 0$.
Ahora buscamos la intersección de r con π. Escribimos r en paramétricas usando el punto $Q(2, 6, 0)$ y $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Sustituimos en el plano:
$(2 + \lambda) + 2(6 + 2\lambda) - (-\lambda) - 8 = 0 \implies 2 + \lambda + 12 + 4\lambda + \lambda - 8 = 0 \implies 6\lambda + 6 = 0 \implies \lambda = -1$.
Sustituimos $\lambda = -1$ en las ecuaciones de r para hallar el punto P'.
$x = 2 - 1 = 1, y = 6 - 2 = 4, z = -(-1) = 1$.

$$\boxed{\textbf{La proyección ortogonal es el punto } \boldsymbol{P' = (1, 4, 1)}.}$$

Problema 5. Análisis

Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$. Obtener:

a) **El dominio y las asíntotas de f(x).**
b) **Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) y sus máximos y mínimos.**
c) **El área compresa entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 1$ y $x = 2$.**

Solución:

a) **El dominio y las asíntotas de f(x).**

Dominio:
La función es la suma de dos términos. Para $\frac{1}{x}$, se requiere $x \neq 0$. Para $\ln(x+1)$, se requiere $x+1>0 \implies x>-1$.
La intersección de ambas condiciones es $Dom(f) = (-1,0) \cup (0,+\infty)$.

Asíntotas Verticales:
Estudiamos los límites en los bordes del dominio: $x=-1$ y $x=0$.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{-1} + \ln(0^+) = -1 - \infty = -\infty$$

Hay una asíntota vertical en $x=-1$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} + \ln(1) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} + 0 = \pm\infty$$

Hay una asíntota vertical en $x=0$.

Asíntotas Horizontales/Oblicuas:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right) = 0 + \infty = +\infty$$

No hay asíntota horizontal.

Para asíntota oblicua,

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x+1)}{x}\right) = 0 + 0 = 0$$

(El segundo límite es 0 por L'Hôpital). Como $m=0$, no hay asíntota oblicua.

$$\boxed{\textbf{Dominio: } (-1,0) \cup (0,\infty). \quad \textbf{Asíntotas verticales en } x=-1 \textbf{ y } x=0.}$$

b) **Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) y sus máximos y mínimos.**

Calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

.
Igualamos a cero:

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = 0 \implies \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2} \implies x^2 = x+1 \implies x^2 - x - 1 = 0$$

.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Los puntos críticos son $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ y $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$. Ambos están en el dominio.

Intervalo	**Signo de $f'(x)$**	**Comportamiento de $f(x)$**
$(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$	$+$	**Creciente** $\nearrow$
$(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$	$-$	**Decreciente** $\searrow$
$(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$	$-$	**Decreciente** $\searrow$
$(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$	$+$	**Creciente** $\nearrow$

Hay un máximo relativo en $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y un mínimo relativo en $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Creciente en $\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.
Decreciente en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
Máximo en $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, **Mínimo en** $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) El área compresa entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 1$ y $x = 2$.

El área es $A = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right) dx$. En $[1, 2]$, $f(x) > 0$.

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 \ln(x+1) dx$$

La primera integral es

$$[\ln|x|]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

La segunda se resuelve por partes:

$$u = \ln(x+1), dv = dx \implies du = \frac{dx}{x+1}, v = x+1$$

$$\int \ln(x+1)dx = (x+1)\ln(x+1) - \int dx = (x+1)\ln(x+1) - x$$

Evaluando:

$$[(x+1)\ln(x+1) - x]_1^2 = (3\ln(3) - 2) - (2\ln(2) - 1) = 3\ln(3) - 2\ln(2) - 1$$

El área total es

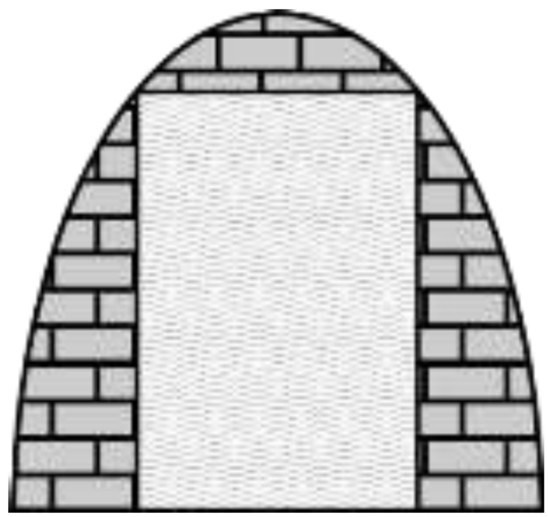
$$A = \ln(2) + 3\ln(3) - 2\ln(2) - 1 = 3\ln(3) - \ln(2) - 1$$

El área es $3\ln(3) - \ln(2) - 1 \approx 1.60$ unidades cuadradas.

Problema 6. Análisis

El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$ donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

a) **Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible.**
b) **Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra.**



Solución:

a) **Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible.**

Sea (x, y) la esquina superior derecha de la puerta. Por simetría, la esquina superior izquierda será $(-x, y)$.
Las dimensiones de la puerta son:
Base: $2x$.
Altura: $y = -x^2 + 12$.
La superficie (área) de la puerta es $S(x) = \text{Base} \cdot \text{Altura} = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$.
El dominio de x es $(0, \sqrt{12})$ para que las dimensiones sean positivas.
Para maximizar la superficie, derivamos e igualamos a cero:
$S'(x) = -6x^2 + 24$.
$S'(x) = 0 \implies -6x^2 + 24 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = 2$ (descartamos $x = -2$).
Comprobamos con la segunda derivada: $S''(x) = -12x$.
$S''(2) = -24 < 0$, por lo que es un máximo.
Las dimensiones son:
Base $= 2x = 2(2) = 4$ metros.
Altura $= y = -2^2 + 12 = 8$ metros.

$\boxed{\textbf{Las dimensiones son 4 metros de base y 8 metros de altura.}}$

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra.

Área de la puerta: $S = \text{Base} \cdot \text{Altura} = 4 \cdot 8 = 32 \text{ m}^2$.
Para el área de piedra, necesitamos el área total bajo el arco parabólico. Los puntos de corte con el suelo ($y = 0$) son

$$-x^2 + 12 = 0 \implies x = \pm\sqrt{12}$$

Área total =

$$\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} (-x^2 + 12)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 12x \right]_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}$$

$= (-\frac{12\sqrt{12}}{3} + 12\sqrt{12}) - (\frac{12\sqrt{12}}{3} - 12\sqrt{12}) = 2(12\sqrt{12} - 4\sqrt{12}) = 2(8\sqrt{12}) = 16\sqrt{12} = 32\sqrt{3} \approx 55.43 \text{ m}^2$.
Área de piedra = Área total - Área de la puerta = $32\sqrt{3} - 32$.

$$\boxed{\textbf{Área de la puerta: 32 m}^2\textbf{. Área de piedra: } 32(\sqrt{3} - 1) \approx 23.43 \textbf{ m}^2\textbf{.}}$$

Problema 7. Probabilidad

Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) **Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras.**
b) **Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras.**

Solución:

a) **Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras.**

Sea C_1: cara en M_1, X_1: cruz en M_1. $P(C_1) = x, P(X_1) = 1 - x$.
Sea C_2: cara en M_2, X_2: cruz en M_2. $P(C_2) = y, P(X_2) = 1 - y$.
- **Ninguna cara:** $P(X_1 \cap X_2) = P(X_1)P(X_2) = (1 - x)(1 - y)$.
- **Dos caras:** $P(C_1 \cap C_2) = P(C_1)P(C_2) = xy$.
- **Una cara:** $P(C_1 \cap X_2) + P(X_1 \cap C_2) = x(1 - y) + (1 - x)y = x - xy + y - xy = x + y - 2xy$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{P(0\ Caras) =\ (1 - x)(1 - y)} \\ \mathbf{P(1\ Cara) =\ x + y - 2xy} \\ \mathbf{P(2\ Caras) =\ xy} \end{array}}$$

b) **Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras.**

Analizamos los resultados finales posibles:
- **Final 0 Caras:** Ocurre si en el primer lanzamiento salen X_1X_2 Y en el relanzamiento de ambas vuelven a salir X_1X_2. $P(0C_f) = P(X_1X_2 \text{ y luego } X_1X_2) = P(X_1X_2) \cdot P(X_1) \cdot P(X_2) = (1 - x)(1 - y)(1 - x)(1 - y) = (1 - x)^2(1 - y)^2$.
- **Final 2 Caras:** Ocurre en cuatro casos mutuamente excluyentes:
  1. Sale C_1C_2 en el primer lanzamiento: $P_1 = xy$.
  2. Sale C_1X_2 y en el relanzamiento de M_2 sale C_2: $P_2 = x(1 - y) \cdot y = xy(1 - y)$.
  3. Sale X_1C_2 y en el relanzamiento de M_1 sale C_1: $P_3 = (1 - x)y \cdot x = xy(1 - x)$.
  4. Sale X_1X_2 y en el relanzamiento de ambas salen C_1C_2: $P_4 = (1 - x)(1 - y) \cdot xy$.

  $P(2C_f) = xy + xy(1 - y) + xy(1 - x) + xy(1 - x)(1 - y) = xy[1 + (1 - y) + (1 - x) + (1 - x)(1 - y)] = xy[x + y - xy + 1]$.
- **Final 1 Cara:** Por el suceso contrario: $P(1C_f) = 1 - P(0C_f) - P(2C_f)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{P(0\ Caras\ final) =\ (1 - x)^2(1 - y)^2} \\ \mathbf{P(2\ Caras\ final) =\ xy(x + y - xy + 1)} \\ \mathbf{P(1\ Cara\ final) =\ 1 - (1 - x)^2(1 - y)^2 - xy(x + y - xy + 1)} \end{array}}$$

Problema 8. Probabilidad

Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de paises de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

a) **Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase.**
b) **Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase.**

Definimos los sucesos:
N: Vuelo nacional. UE: Vuelo de la Unión Europea. O: Otro vuelo.
R: El vuelo se retrasa.

Calculamos las probabilidades a priori:
$P(N) = 95/161$, $P(UE) = 50/161$, $P(O) = 16/161$.

Y las probabilidades condicionadas: $P(R|N) = 0.05$, $P(R|UE) = 0.04$, $P(R|O) = 0.0625$.

Aplicamos el Teorema de la Probabilidad Total para calcular $P(R)$:

$$P(R) = P(R|N)P(N) + P(R|UE)P(UE) + P(R|O)P(O)$$

$$P(R) = (0.05)\left(\frac{95}{161}\right) + (0.04)\left(\frac{50}{161}\right) + (0.0625)\left(\frac{16}{161}\right)$$

$$P(R) = \frac{4.75}{161} + \frac{2}{161} + \frac{1}{161} = \frac{7.75}{161} \approx 0.0481$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(\text{Retraso}) = \frac{7.75}{161} \approx 0.0481}.}$$

b) **Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea.**

Buscamos la probabilidad $P(UE|R)$. Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(UE|R) = \frac{P(R|UE)P(UE)}{P(R)}$$

Usamos los datos y el resultado del apartado anterior:

$$P(UE|R) = \frac{(0.04)\left(\frac{50}{161}\right)}{\frac{7.75}{161}} = \frac{2/161}{7.75/161} = \frac{2}{7.75} \approx 0.2581$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(UE|R) = \frac{2}{7.75} \approx 0.2581}.}$$